$T_1 : \begin{cases} y = f_g'(1)(x-1)+f(1) \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_1 : \begin{cases} y = -x+1 \\ x \le 1 \end{cases}}$

$T_2 : \begin{cases} y = f_d'(x-1)+f(1) \\ x \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{T_2 : \begin{cases} y = x-1 \\ x \ge 1 \end{cases}}$

Exercice n° 4

$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{x+1} & x \ge 3 \\ f(x) = x^2 - 5x + c & x < 3 \end{cases}$

● */ Sur $]3,+\infty[$: $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ est continue sur $]3,+\infty[$ (car $x \mapsto x+1$ continue et positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est continue sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ Continue sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

*/ continuité en $x_0 = 3$:

$\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^+} 4\sqrt{x+1} = 8 = f(3)$

$\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 3^-} x^2 - 5x + c = -6 + c$

Donc f est. Continue en $x_0 = 3$ si et seulement si $-6+c = 8 \Rightarrow c = 14$.

D'où pour f est continue sur $\mathbb{R}$ pour $\boxed{c=14}$

●

*/ Sur $]3,+\infty[$: $f(x) = 4\sqrt{x+1}$ est dérivable sur $]-\infty,3[$ (car $x \mapsto x+1$ dérivable et strictement positive sur $]3,+\infty[$)

*/ Sur $]-\infty,3[$: $f(x)=x^2-5x+c$ fonction polynôme donc f est dérivable Sur $]-\infty,3[$

$\Rightarrow f$ derivable sur $\mathbb{R}\setminus\{3\}$.

Dérivabilité en $x_0 = 3$:

• $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{4\sqrt{x+1}-8}{x-3}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{\left(4\sqrt{x+1}-8\right)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{16(x+1)-64}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{16(x+1-4)}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{16(x-3)}{(x-3)\left(4\sqrt{x+1}+8\right)} = 1 = f_g'(1)$

$\dfrac{f(x)-f(3)}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{x^2-5x+14-8}{x-3}$

$\lim\limits_{3^-} \dfrac{x^2-5x+6}{x-3} = \lim\limits_{x\to 3^-} \dfrac{(x-2)(x-3)}{x-3} = 1$

clusion : $f_g'(3) = f_d'(3) = 1$

$\Rightarrow f$ est dérivable en $x_0 = 3$ et $f'(3) = 1$

Finalement f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$\begin{cases} f'(x) = 2x-5 \text{ pour } x < 3 \\ f'(3) = 1 \\ f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x+1}} \text{ pour } x > 3 \end{cases}$

Exercice n° 5

● $x \mapsto x^2 - 1$ est continue sur IR (Fonction polynôme) donc en particulier elle est continue sur $]-\infty,1]$.

$x \mapsto \sqrt{x} - 1$ est continue pour $x \ge 0$ en particulier elle est continue sur $]1,+\infty[$.

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \sqrt{x} - 1 = 0 = f(1)$

D'où f est continue en $x_0 = 1$ et par la suite sur IR

● a) */ $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}$

$= \lim\limits_{x\to 1^-} (x+1) = 2 = f_g'(1)$

*/ $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)}$

$= \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1}{\left(\sqrt{x}+1\right)} = \dfrac{1}{2} = f_d'(1)$

Conclusion :

$f_g'(1) \ne f_d'(1) \Rightarrow f$ n'est pas dérivable en $x_0 = 1$.

b) Interprétation géométrique :

Au point d'abscisse $x_0 = 1$, C_f admet Deux demi tangentes d'équations :

$T_1 \begin{cases} y = 2x-2 \\ x \le 1 \end{cases}$ $\quad$ $T_2 \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{2} \\ x \ge 1 \end{cases}$

Qaray.tn -Aqra Blech- Qaray.tn